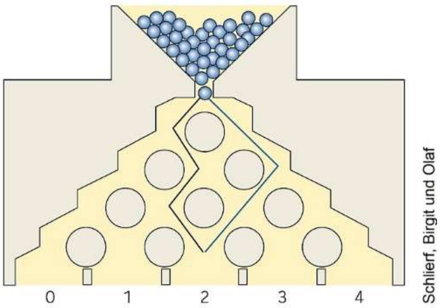
Das Galton-Brett

Lösungen:



a) Mit dem abgebildeten Galton-Brett kann man z. B. einen 4-maligen Münzwurf simulieren. Jede Nagelreihe steht für eine Stufe der Bernoulli-Kette. Dabei wird eine Ablenkung der Kugel nach rechts als Erfolg (Zahl) und eine Ablenkung nach links als Misserfolg (Wappen) bezeichnet. Die Fachnummer zählt somit die Anzahl der Erfolge. Fällt eine Kugel z. B. in das Fach mit der Nummer 3, so wird dies als 3-mal Zahl und einmal Wappen gewertet.

b) Mögliche Ergebnisse bei 100 Wiederholungen:

Anzahl Zahl	0	1	2	3	4
Häufigkeit	7	24	38	26	5

Mögliche Ergebnisse bei 500 Wiederholungen:

Anzahl Zahl	0	1	2	3	4
Häufigkeit	34	114	190	125	37

Mögliche Ergebnisse bei 1000 Wiederholungen:

Anzahl Zahl	0	1	2	3	4
Häufigkeit	54	250	378	258	60

c) Die Anzahl 2 kam immer am häufigsten vor.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis Zahl beim Werfen einer Münze ist $\frac{1}{2}$. Wenn man eine Münze viermal hintereinander wirft und dieses Experiment genügend oft wiederholt, kann man im Mittel $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ Erfolge erwarten.
Berechnet man z.B. das arithmetische Mittel der Häufigkeitserteilung bei 1000 Wiederholungen, so ergibt sich

$$0 \cdot 0{,}054 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}378 + 3 \cdot 0{,}258 + 4 \cdot 0{,}06 \approx 2.$$

d) Die Häufigkeitsverteilung bei 20 000 Wiederholungen sollte ungefähr in der Nähe folgender Werte liegen:

Anzahl Zahl	0	1	2	3	4
Häufigkeit in Tausend	1,25	5	7,5	5	1,25

e) Da die Erfolgswahrscheinlichkeit und die Misserfolgswahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$ betragen, ist die Wahrscheinlichkeiten immer $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ am Ende eines jeden Pfades im Baumdiagramm bei dieser Bernoulli-Kette der Länge 4.
Bei einer Bernoulli-Kette der Länge 4 gibt es
$\binom{4}{0} = 1$ Pfad mit 0 Erfolgen, $\binom{4}{1} = 4$ Pfade mit 1 Erfolgen, $\binom{4}{2} = 6$ Pfade mit 2 Erfolgen, $\binom{4}{3} = 4$ Pfade mit 3 Erfolgen und $\binom{4}{4} = 1$ Pfad mit 4 Erfolgen.
Damit ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

Anzahl Zahl	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Die **relativen** Häufigkeiten aus Teilaufgabe c) liegen in der Nähe dieser Wahrscheinlichkeiten.

f) Wenn man die Anzahl der Nagelreihen mit n bezeichnet, so betrachtet man eine n-stufige Bernoulli-Kette, bei der die Erfolgswahrscheinlichkeit und die Misserfolgswahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$ betragen. Am Ende eines jeden Pfades im Baumdiagramm ergibt sich damit die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Für k Erfolge gibt es in einem solchen Baumdiagramm genau $\binom{n}{k}$ Pfade.
Somit erhält man für eine Anzahl von k Erfolgen die Wahrscheinlichkeit $\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Bei einer Simulation mit 100, 500 bzw. 1000 Wiederholungen liegen die Häufigkeiten für k Erfolge ungefähr bei $100 \cdot \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $500 \cdot \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ bzw. $1000 \cdot \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.